Unité d'Enseignement CORO Compléments et outils de recherche opérationnelle

Méthodes arborescentes et PLNE

ENSIIE

Sourour Elloumi et Eric Soutil

UE CORO – Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision – Plan du cours

- Partie 1 – Compléments de PL
  - *Dualité*
  - *Analyse de sensibilité / Paramétrisation*
- Partie 2 – PLNE
- Partie 3 – Métaheuristiques
- Partie 5 – Dualité lagrangienne

Définition PLNE

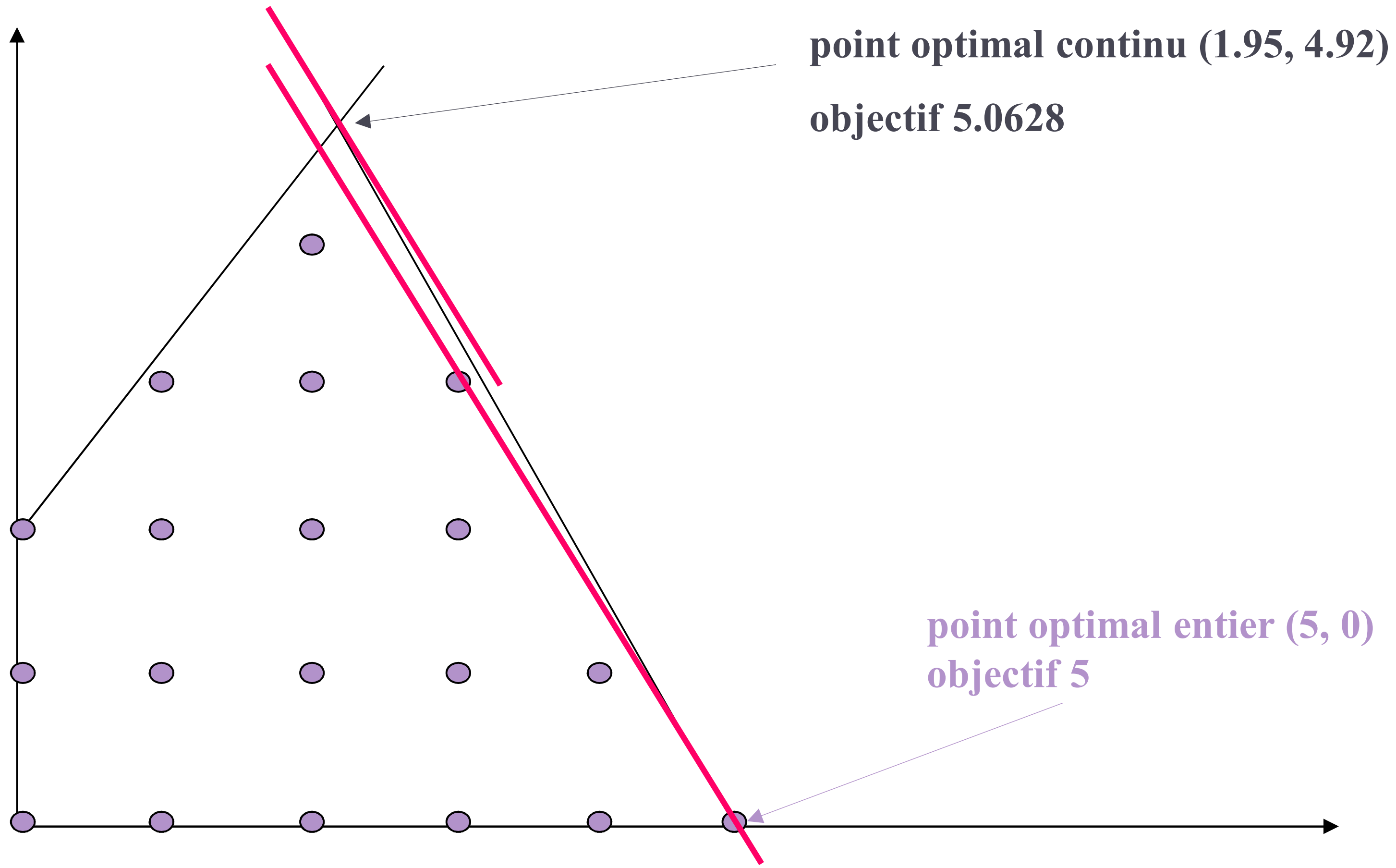
- **Programmation linéaire en nombres entiers (PLNE)** : Programmation linéaire où certaines variables ne peuvent prendre que des valeurs entières

  - **Programmation pure** (resp. **mixte**) en NE : la totalité (resp. un sous-ensemble) des variables sont entières
  - **Programmation 0-1** ou binaire : les variables entières ne peuvent être que 0 ou 1

Exemple 1

$$\begin{cases} \max x_1 + 0.64x_2 \\ \text{s.c.}: \\ \quad 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\ \quad 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers} \end{cases}$$

Exemple 1- Suite



Définition PLNE

- PL et PLNE sont TRÉS différentes
- Optimisation continue convexe / Optimisation discrète

Suite de ce cours :

- Utilité de la PLNE
- Résolution des PLNE

Application 1 : choix d'usines et d'entrepôts

- But : choisir de nouveaux emplacements pour construire des usines et des entrepôts
- Deux emplacements : Lyon et Toulouse
- On ne peut construire plus d'un entrepôt
- On ne peut construire un entrepôt que dans une ville où l'on a aussi une usine
- On connaît, pour chaque ville :
  - Coefficient de rentabilité usine ou entrepôt
  - Coût de construction usine ou entrepôt
- Le coût total de construction ne peut pas dépasser 10
- Objectif : maximiser la rentabilité

Application 1 : données

	Rentabilité	Coût
Usine à L	9	6
Usine à T	5	3
Entrepôt à L	6	5
Entrepôt à T	4	2

Application 1 : modèle

- Variables de décision :
  - $x_1 = 1$ si une **usine** est construite à **Lyon** et 0 sinon
  - $x_2 = 1$ si une **usine** est construite à **Toulouse** et 0 sinon
  - $y_1 = 1$ si un **entrepôt** est construit à **Lyon** et 0 sinon
  - $y_2 = 1$ si un **entrepôt** est construit à **Toulouse** et 0 sinon

Application 1 : modèle

- **Contraintes**

  1- On ne peut construire plus d'un entrepôt

  $$y_1 + y_2 \leq 1$$

  2- On ne peut construire un entrepôt que dans une ville où l'on a aussi une usine

  $$y_1 \leq x_1$$
  $$y_2 \leq x_2$$

  3- Le coût total de construction ne peut pas dépasser 10

  $$6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

- **Objectif**

  $$\max \; 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

Application 1 : résumé du modèle et mise en version minimisation

$$
\begin{cases}
\min Z = -9x_1 - 5x_2 - 6y_1 - 4y_2 \\
\text{s.c.}: \\
\quad y_1 + y_2 \leq 1 \\
\quad y_1 \leq x_1 \\
\quad y_2 \leq x_2 \\
\quad 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\
\quad 0 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 \leq 1 \quad \text{et entiers}
\end{cases}
$$

C'est notre exemple de base

Exemple de base: résolution par un solveur/modeleur (glpk-gmpl)


```
#Exemple du cours

#variables
var x1 binary;
var x2 binary;
var y1 binary;
var y2 binary;

#fonction objectif
minimize Z : -9*x1 - 5*x2 - 6*y1 - 4*y2 ;

#contraintes
subject to
c1: y1 + y2 <= 1;
c2: y1 <= x1;
c3: y2 <= x2;
c4: 6*x1 +3*x2 +5*y1 +2*y2 <= 10;
```

```
printf "------Début de la résolution -----\n";
solve;

printf "------Fin de la résolution -----\n";
display Z;
display x1;
display x2;
display y1;
display y2;

end;
```

Exemple de base: résolution par un solveur/modeleur (OPL-Cplex)

Valeur optimale : $Z^* = -14$

valeur de x1 : 1

valeur de x2 : 1

valeur de y1 : 0

valeur de y2 : 0

Langage de modélisation : OPL (Optimization Programming Language)
Solveur : Cplex (IBM-Ilog)

Résolution des PLNE

- Nous allons voir comment résoudre les PLNE

1. Dans le cas particulier des problèmes purement binaires PL01
2. Dans le cas général des PLNE

Résolution des PL01- Exemple de base

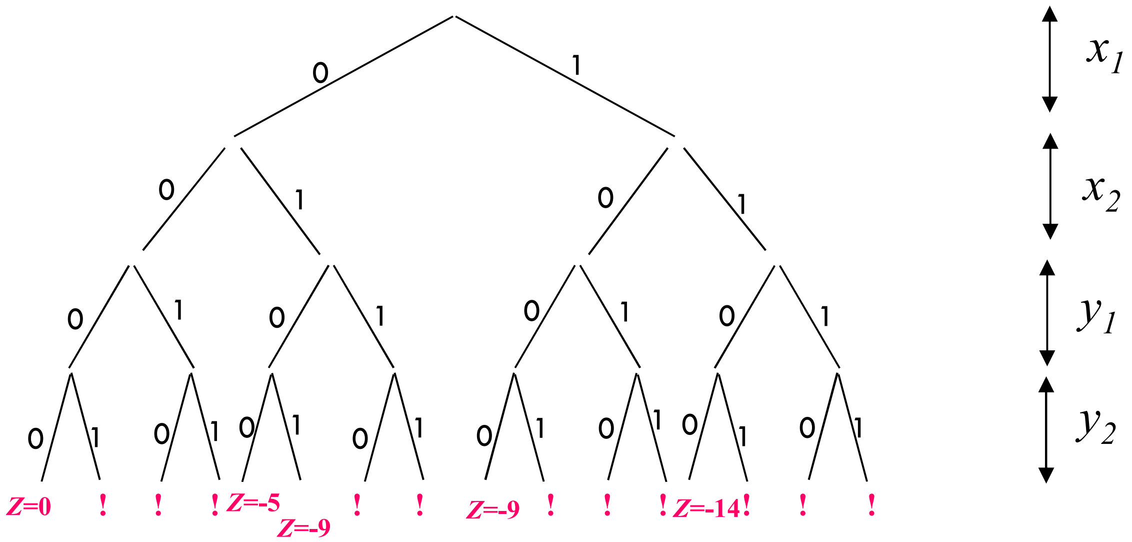
$$\begin{cases} \min Z = -9x_1 - 5x_2 - 6y_1 - 4y_2 \\ \text{s.c.}: \\ \quad y_1 + y_2 \leq 1 \\ \quad y_1 \leq x_1 \\ \quad y_2 \leq x_2 \\ \quad 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ \quad 0 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 \leq 1 \quad \text{et entiers} \end{cases}$$

Résolution des PL01

1ère idée : énumération

Résolution des PL01- Énumération

- Idée : il existe un nombre fini de solutions. Enumérons-les !



Résolution des PL01- Enumération

- Pour n variables binaires, **2^n** cas possibles
- Pour $n=20$, plus d'un million
- Pour $n=30$, plus d'un milliard …

- **Idée d'énumération de tous les cas possibles impraticable en Optimisation Discrète en général**

Résolution des PL01

<u>**2ème idée**</u> : encadrement de la valeur optimale

Relaxation continue - exemple de base

- **Relaxation continue** = on « oublie » le caractère entier des variables
- On obtient un programme linéaire (continu) qu'on sait résoudre, par exemple par la méthode du simplexe :
  - Solution $(x_1, x_2, y_1, y_2)=(5/6, 1, 0, 1)$
  - Valeur optimale : $Z = -33/2 = -16.5$

Relaxation continue: interprétation

Valeurs possibles de toutes les solutions admissibles, entières ou non

ensiie PARIS - ÉVRY

Relaxation continue: interprétation

Conclusion : la valeur optimale (en entier) ≥ -16.5

Propriété générale

- Pour un problème de maximisation :

  la valeur optimale en entier ≤ la valeur optimale en continu

- Pour un problème de minimisation :

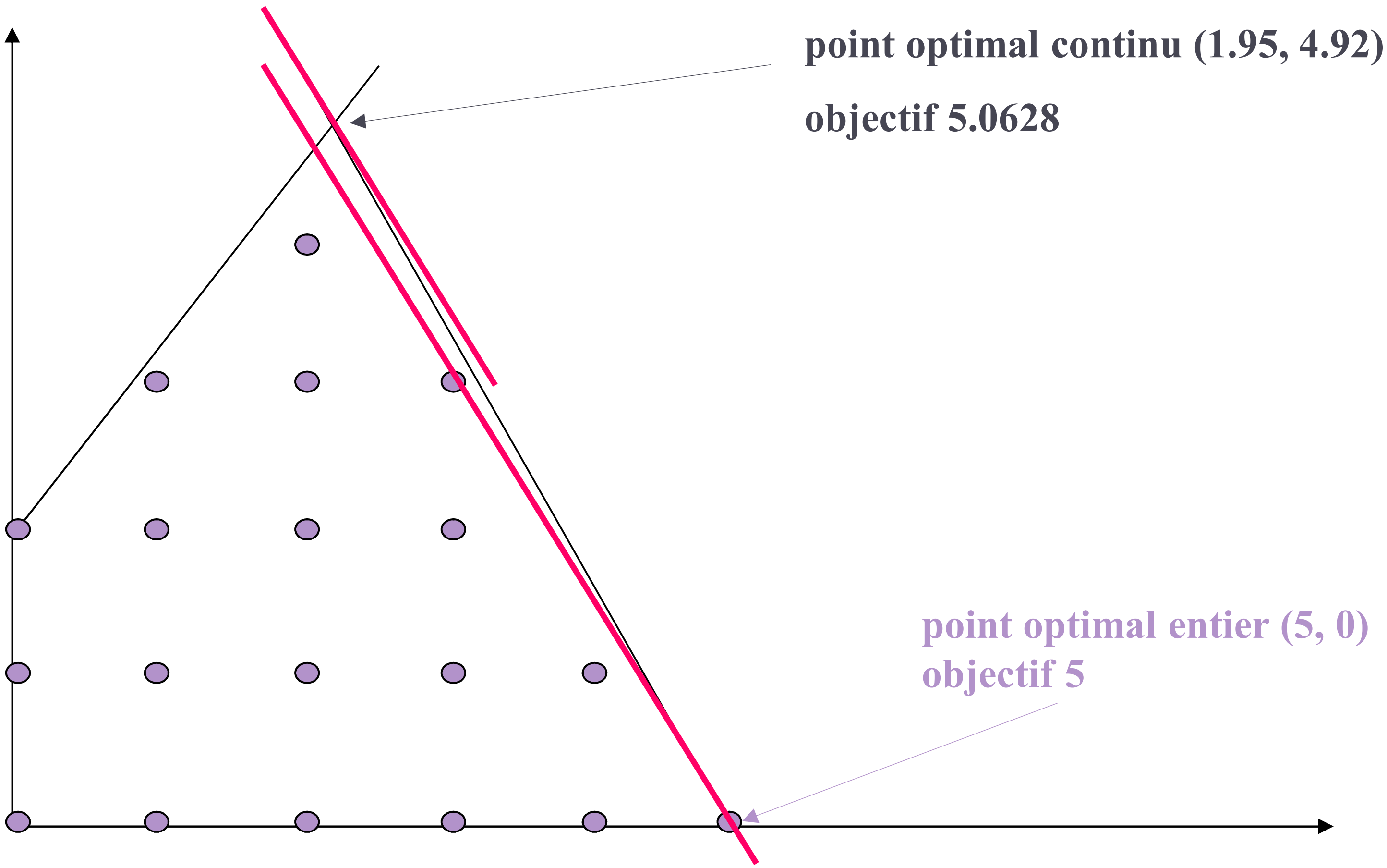
  la valeur optimale en entier ≥ la valeur optimale en continu

On dit que la valeur optimale de la relaxation continue est

- une **borne supérieure** (si objectif de maximisation) ou
- une **borne inférieure** (si objectif de minimisation)

de la valeur optimale en entier

Exemple 1- Rappel (max)



ensiie PARIS - ÉVRY

Connaissance d’une solution admissible

- **Question** : quelle information a-t-on si l’on dispose d’une solution admissible ?

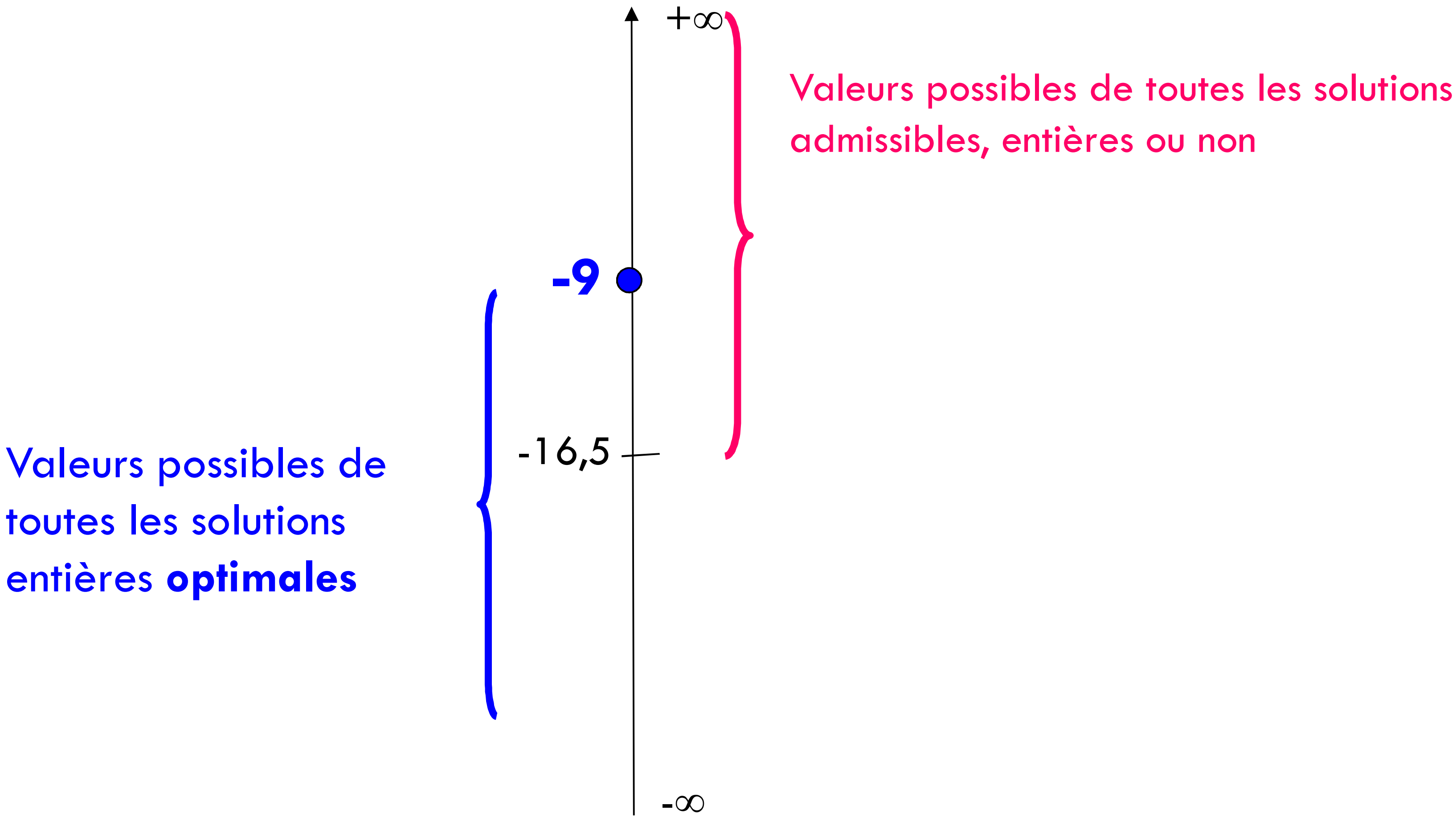
Connaissance d'une solution admissible-exemple de base

- Admettons que l'on connaisse la solution

$(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 0, 0)$

de valeur $Z =$ **-9**

Connaissance d'une solution admissible- exemple de base



ensiie PARIS - ÉVRY

Connaissance d'une solution admissible- exemple de base

Conclusion : la valeur d'une solution optimale est comprise entre -16.5 et **-9**

Propriété générale :

- Pour un problème de minimisation,

$$\underbrace{\text{val. optimale en continu}}_{\text{borne inférieure}} \leq \textbf{val. optimale en entier} \leq \underbrace{\text{val. d'une solution admissible}}_{\text{borne supérieure}}$$

- Pour un problème de maximisation,

val. d'une solution admissible ≤ **val. optimale en entier** ≤ val. optimale en continu

Algorithme Branch-and-Bound (Séparation et évaluation) pour résoudre un PLNE

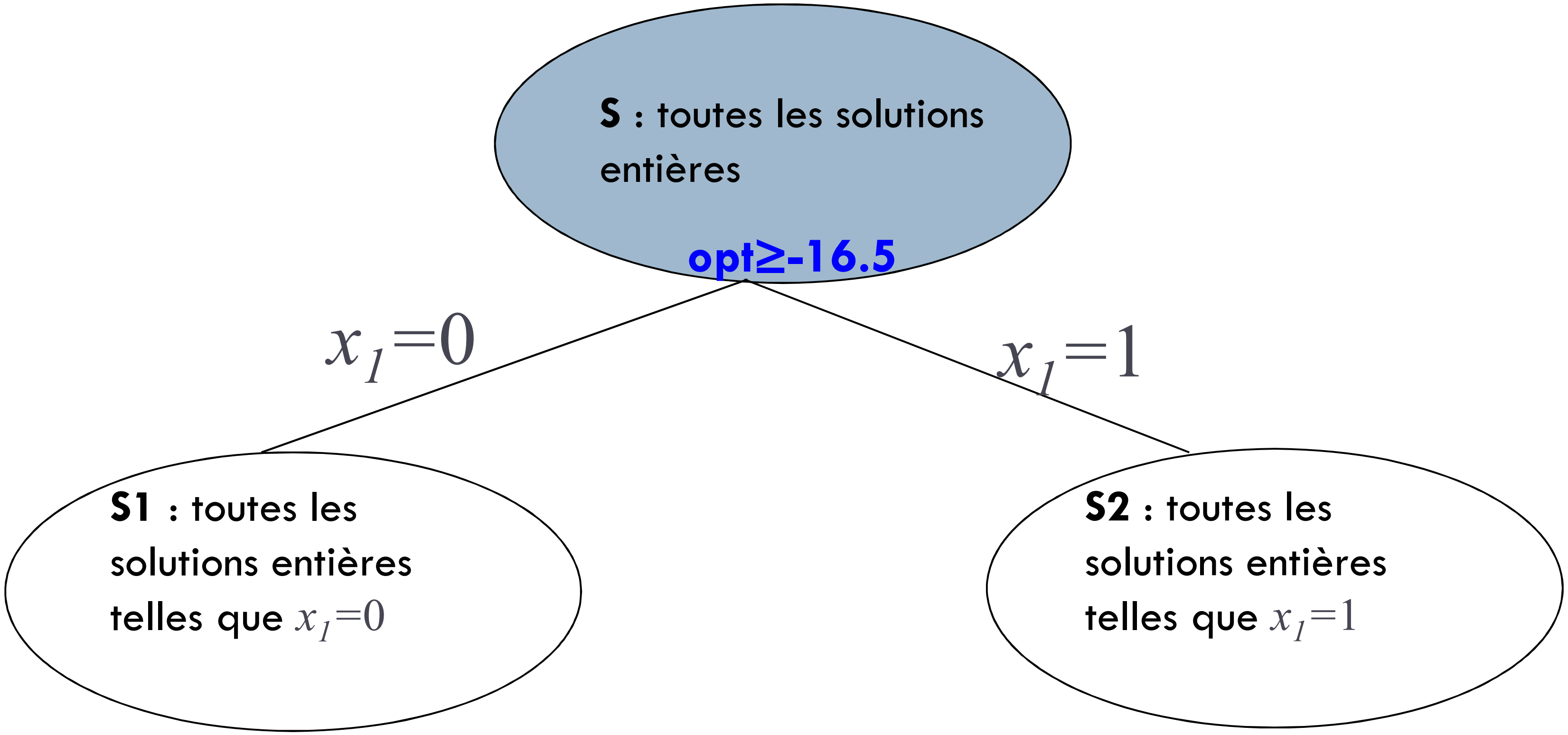
- Ingrédients de base :
  - encadrement de la valeur optimale (borne inférieure, borne supérieure)
  - énumération limitée dans le but d'obtenir un encadrement de plus en plus fin

B&B- Exemple de base

- Dans la solution de la relaxation continue : (x_1, x_2, y_1, y_2)=(5/6, 1, 0, 1), x_1 n'est pas entier. On va « brancher » selon les deux valeurs possibles de x_1 : 0 et 1

B&B- Exemple de base

Solution courante : -9



B&B- Exemple de base

Sous-ensemble **S1** : $x1$=0

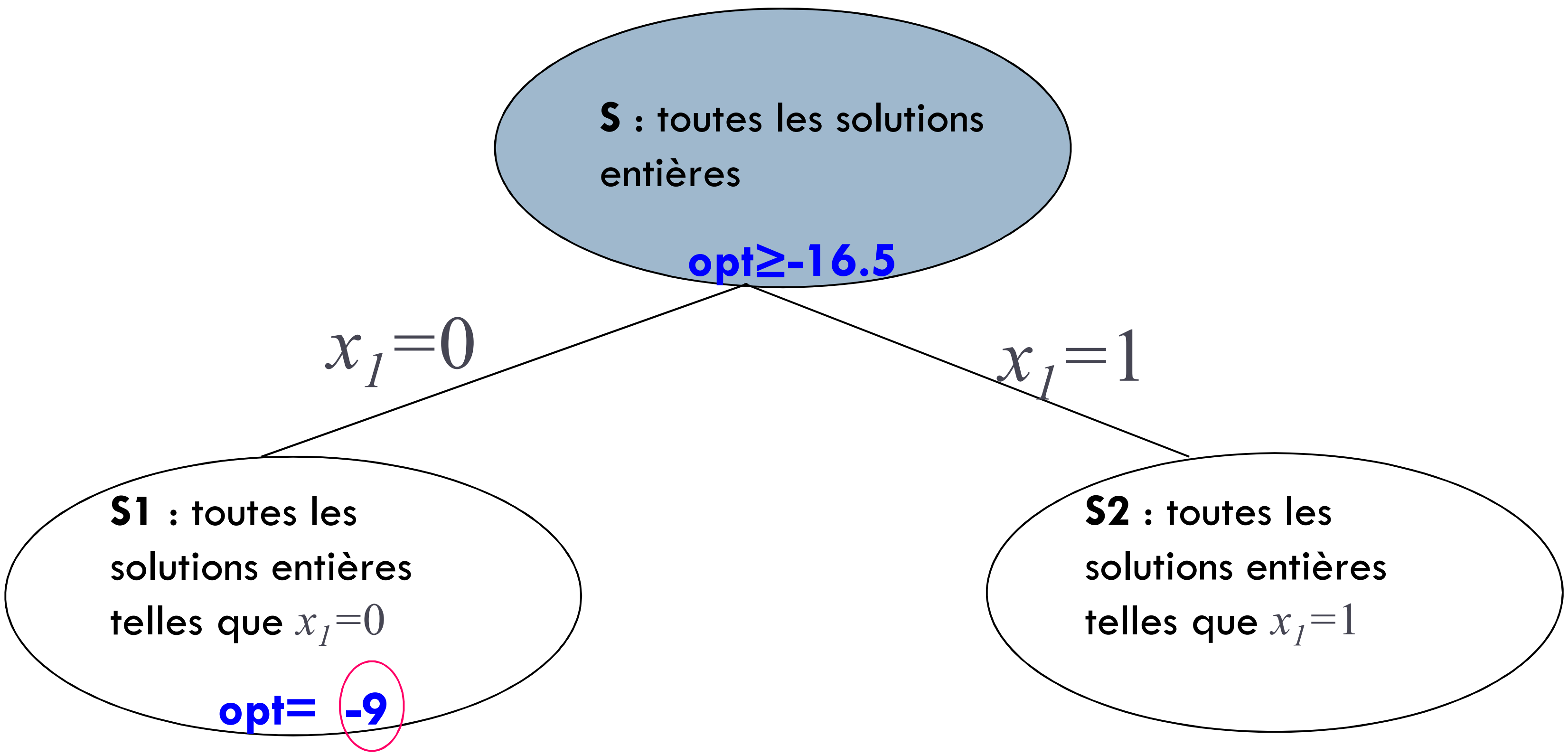
$$
\begin{aligned}
&\min Z = -5x_2 - 6y_1 - 4y_2 \\
&\text{s.c.}: \\
&\quad y_1 + y_2 \leq 1 \\
&\quad y_1 \leq 0 \\
&\quad y_2 \leq x_2 \\
&\quad 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\
&\quad 0 \leq x_2, y_1, y_2 \leq 1 \quad \text{et entiers}
\end{aligned}
$$

Solution de la relaxation continue : (*x2*, *y1*, *y2*)=(1, 0, 1) et *Z*=-9,

et c'est une solution entière !

B&B- Exemple de base

Solution courante : -9



B&B- Exemple de base

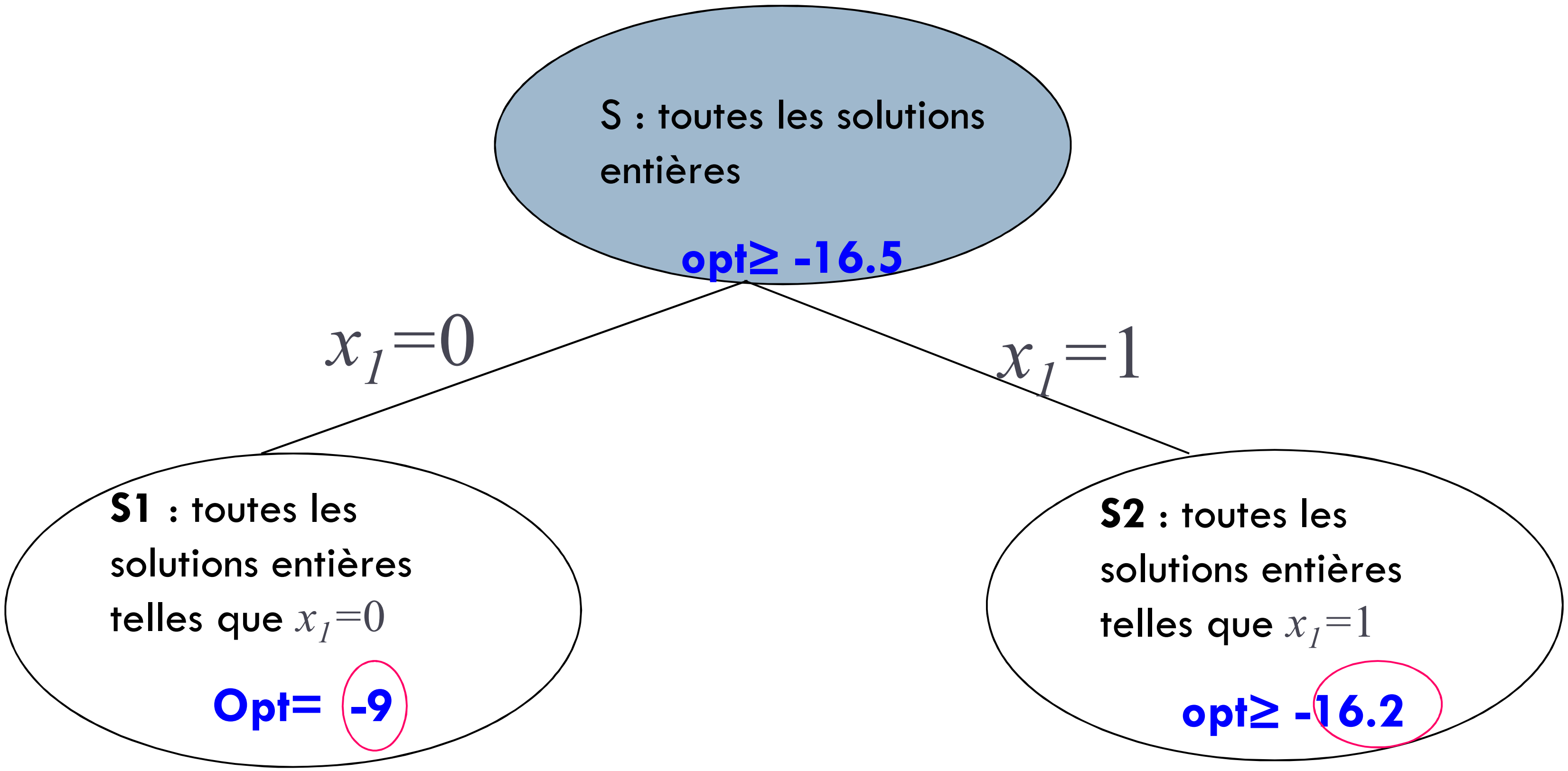
Sous-ensemble **S2** : $x1=1$

$$\begin{aligned}
&\min Z = -9 - 5x_2 - 6y_1 - 4y_2\\
&\text{s.c.}:\\
&\quad y_1 + y_2 \le 1\\
&\quad y_1 \le 1\\
&\quad y_2 \le x_2\\
&\quad 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \le 4\\
&\quad 0 \le x_2, y_1, y_2 \le 1 \quad \text{et entiers}
\end{aligned}$$

Solution de la relaxation continue : ($x2$, $y1$, $y2$)=(4/5, 0, 4/5) et Z=-16.2

B&B- Exemple de base

Solution courante : -9



B&B- Exemple de base

- Conclusion actuelle :
  - Meilleure solution admissible connue (**solution courante**) de valeur -9
  - Meilleure borne inférieure connue : -16.2
  - La valeur optimale est donc comprise entre -9 et -16.2

- Comment continuer ?

B&B- Exemple de base

Le noeud **S1** peut être **élagué** car on connaît la valeur d'une solution entière optimale dans cet ensemble (valeur solution courante ≥ relaxation continue)

S1 : toutes les solutions entières telles que $x_1=0$

Opt= -9

B&B- Exemple de base

Pour le noeud **S2**, on applique le même traitement que pour **S**

S2 : toutes les solutions entières telles que $x_1=1$

opt≥ -16.2

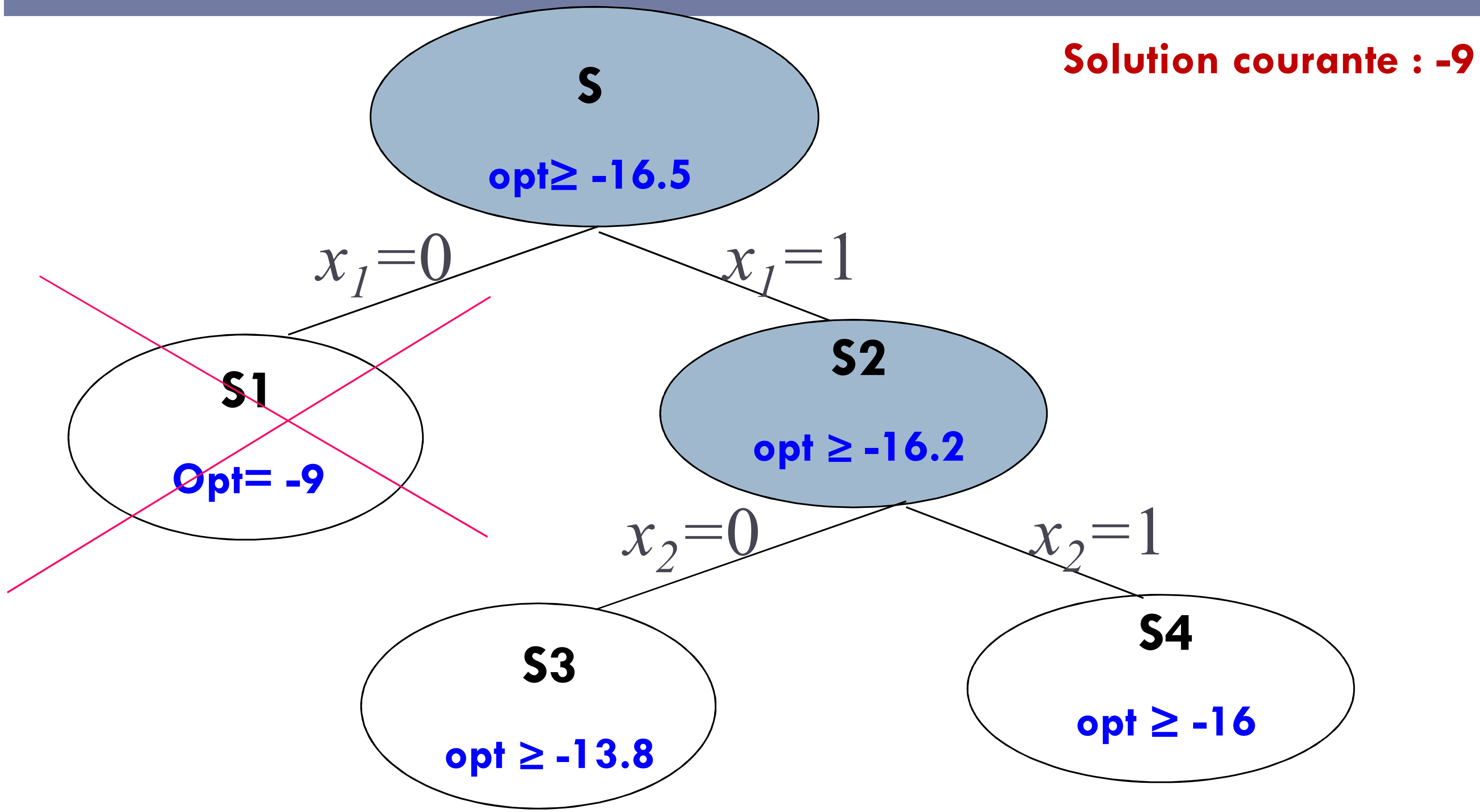
Solution de la relaxation continue : $(x1, x2, y1, y2)=$ (1,4/5, 0, 4/5) et Z=-16.2. On va brancher sur $x2$

B&B- Exemple de base

- Sous-ensemble **S3** : x_1=1 et x_2=0 Solution de la relaxation continue : (x_1,x_2, y_1, y_2)= (1,0,4/5,0) et Z=-13.8

- Sous-ensemble **S4** : x_1=1 et x_2=1 Solution de la relaxation continue : (x_1,x_2, y_1, y_2)= (1,1,0,0.5) et Z=-16

B&B- Exemple de base



B&B- Exemple de base

- Conclusion actuelle :
  - Valeur meilleure solution connue : -9
  - Meilleure borne inférieure connue :-16

- On ne peut élaguer ni **S3** ni **S4**

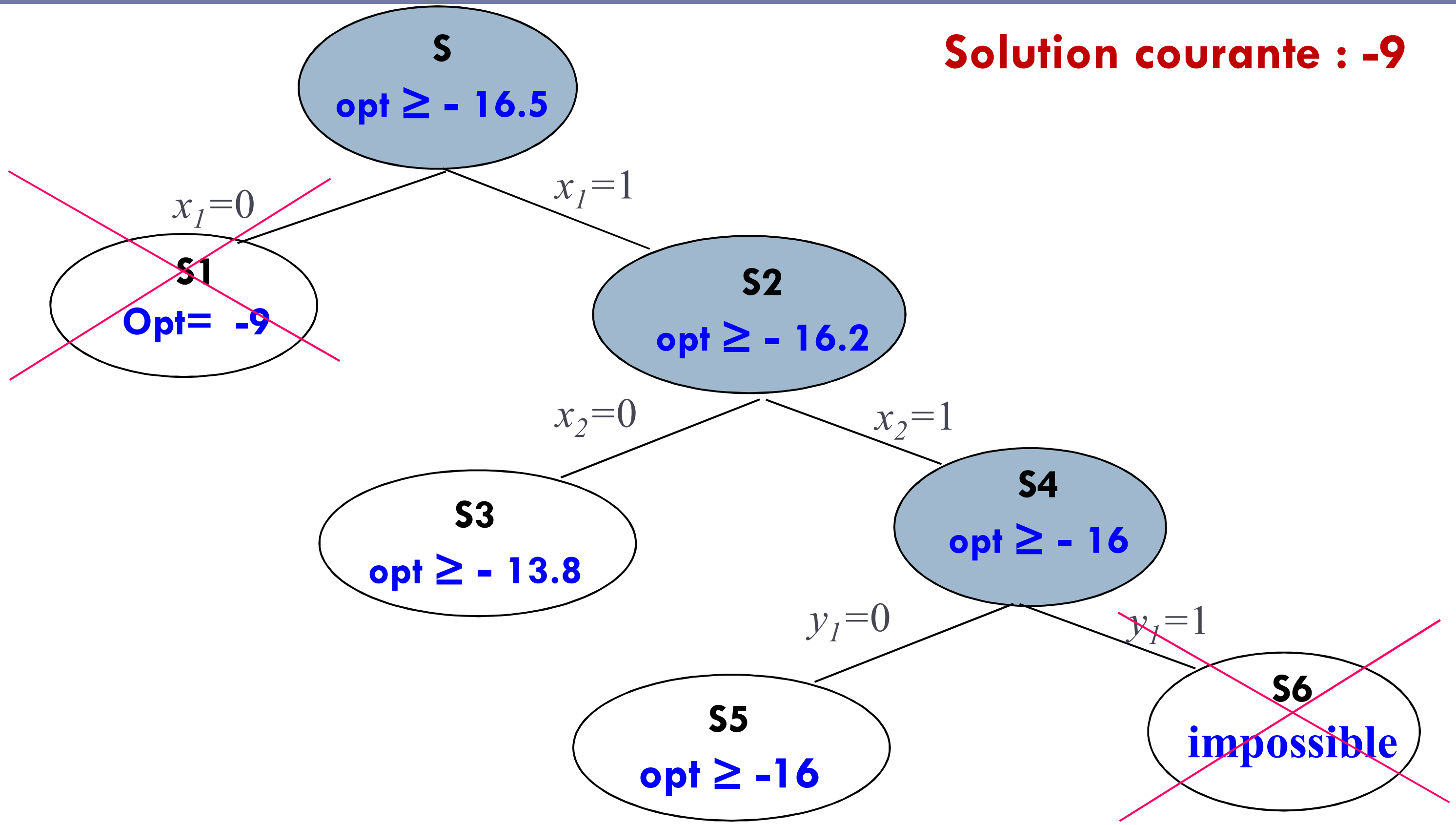
- On « repart » avec **S4** qui a la plus petite borne inférieure. On branche sur $y1$

B&B- Exemple de base

- Sous-ensemble **S5** : x_1=1, x_2=1 et y_1=0 Solution de la relaxation continue : (x_1,x_2, y_1, y_2)= (1,1,0,0.5) et Z=-16

- Sous-ensemble **S6** : x_1=1, x_2=1 et y_1=1 impossible. **S6** peut donc être élagué

B&B- Exemple de base



B&B- Exemple de base

- Conclusion actuelle :
  - Valeur meilleure solution connue : -9
  - Meilleure borne inférieure connue : -16

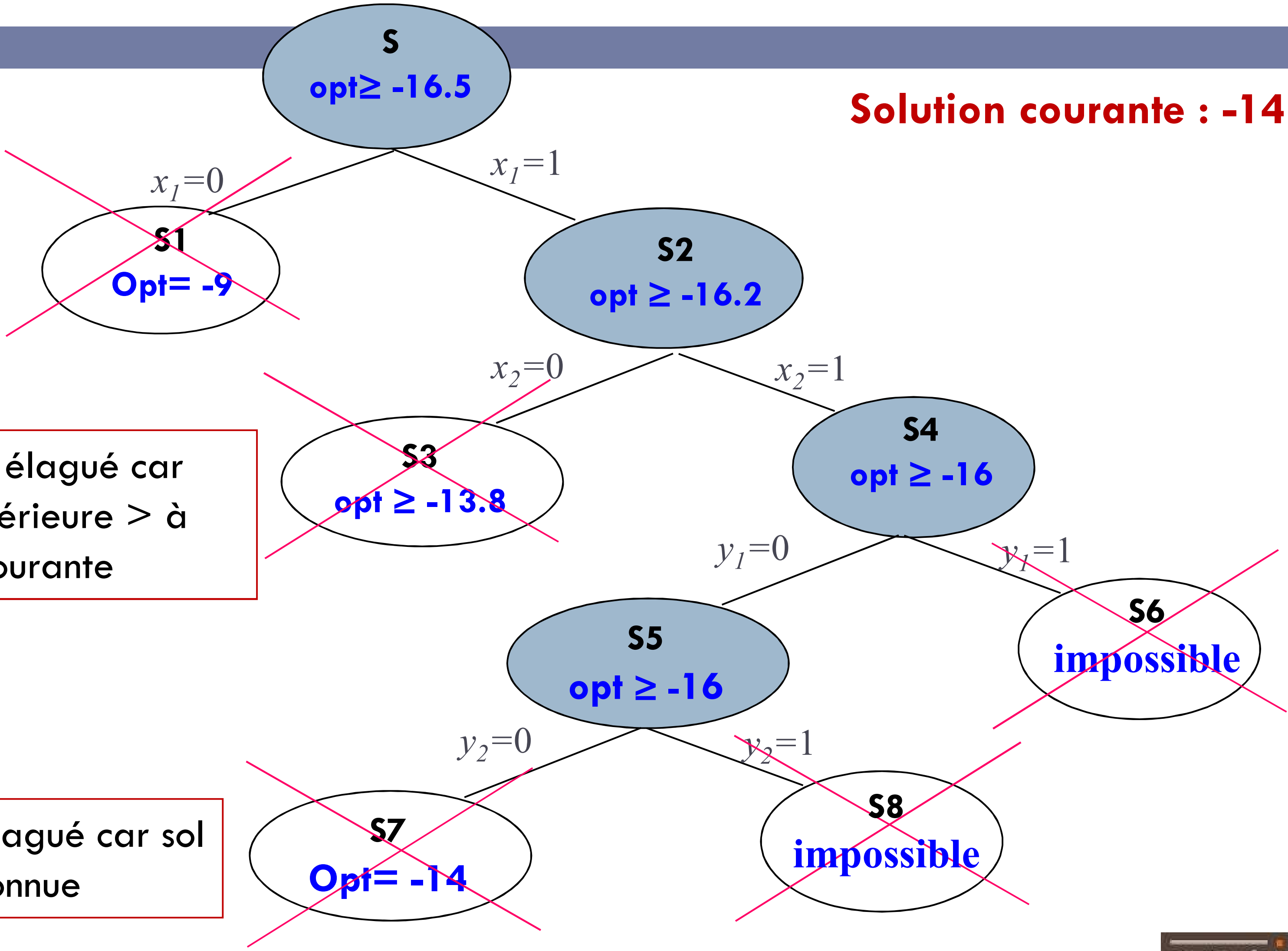
- On peut repartir soit avec **S3** soit avec **S5**, on repart avec **S5**, on branche sur $y2$

B&B- Exemple de base

- Sous-ensemble **S7** : $x1=1$, $x2=1$, $y1=0$ et $y2=0$ Solution unique entière et $Z=-14$ (<-9 donc **Nouvelle solution courante**)

- Sous-ensemble **S8** : $x1=1$, $x2=1$, $y1=0$ et $y2=1$ impossible. S8 peut donc être élagué

B&B- Exemple de base



Peut être élagué car borne inférieure > à val. sol courante

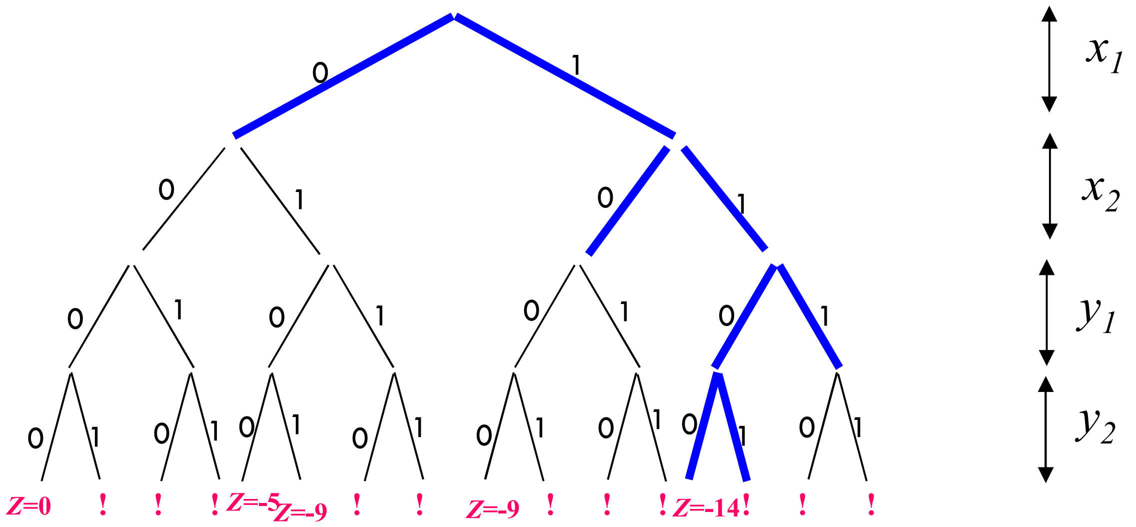
Peut être élagué car sol optimale connue

ensiie PARIS - ÉVRY

B&B- Exemple de base

- Conclusion : on peut s'arrêter car tous les nœuds ont été élagués. On prouve ainsi que la solution de valeur -14 est optimale !

B&B- Exemple de base, gain par rapport à l'énumération complète



Algorithme B&B (min)- Résumé

- **Initialisation**
  - **Calculer une solution admissible de valeur Z* ou poser Z*=+∞**
  - **Résoudre la relaxation continue et mettre à jour éventuellement Z* (évaluation)**
  - **Appliquer les tests d'élagage**
- **Tant qu'il reste des nœuds non élagués**
  - **Choisir un nœud non élagué**
  - **Brancher sur une des variables (séparation)**
  - **Pour chacun des 2 nouveaux nœuds, résoudre la relaxation continue et mettre à jour éventuellement Z***
  - **Appliquer les tests d'élagage**
- **Fin tant que**
- **La solution courante Z* est optimale**

Algorithme B&B (min)- Résumé- suite

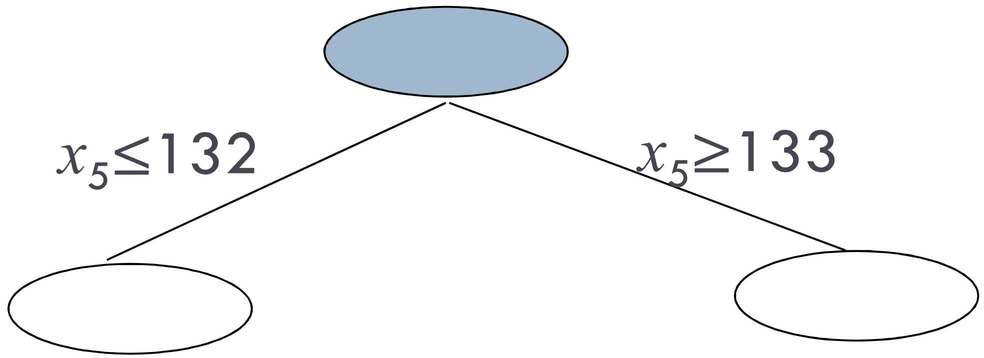
- Un nœud est élagué si:
  - La relaxation continue n'a pas de solution
  - La valeur optimale de la relaxation continue $\geq Z^*$
  - Solution entière de la relaxation continue
  - Pas de solution admissible entière

- La mise en place de l'algorithme nécessite de préciser :
  - La règle de sélection : quel nœud non élagué choisir ?
  - La règle de branchement : sur quelle variable brancher ?

Algorithme B&B (min)- Résumé- suite

- Dans le cas général des variables entières (non seulement 0-1), on choisit une variable de valeur fractionnaire dans la solution optimale de la relaxation continue et on branche sur l'arrondi supérieur et inférieur de cette valeur

Exemple : x_5=132.48



ensiie PARIS - ÉVRY

Détermination des solutions admissibles

- Ce n'est pas toujours facile (pb général NP-complet)
- Il n'existe pas de méthode générale rapide
- On peut se contenter de celles qu'on trouve lors de la résolution des relaxations continues
- Il existe des algorithmes qui fonctionnent bien dans des cas particuliers, par exemple l'arrondi

Problème d'efficacité

- C'est le nombre de nœuds explorés qui déterminera le temps de calcul. À chaque nœud, on résout un programme linéaire (continu)
- On ne peut pas prévoir à l'avance le nombre maximal de nœuds qu'il faudra explorer
- En règle générale, un programme linéaire continu se résout « vite »
- Un PLNE nécessite du temps …

Efficacité- Exemple

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.c. :}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \le b_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \le b_2$$

$$x_j \quad \text{variables binaires}$$

- Problème avec n=1000 variables données engendrées aléatoirement
- Relaxation continue : 0.03 secondes
- Résolution en entier : 43 secondes (251402 nœuds)

Quelques implémentations classiques des B&B

- **Méthode de Balas pour les PL01** :
  - Ré-écrire z (à minimiser) de sorte que z n'ait pas de coefficients négatifs et les variables soient triées en ordre croissant de ces coefficients (tout programme peut être exprimé de cette façon)
  - Séparation : fixer une variable soit à 0 soit à 1
  - Si un sous-problème a un second-membre positif ou nul, on a déjà une solution réalisable (en fixant toutes les variables restant à 0) et c'est la solution optimale de ce (sous-)problème
  - Parcourir l'arbre en profondeur
  - Plusieurs règles d'élagage permettent de savoir qu'un problème donné est infaisable ou ne peut donner une solution meilleure d'une solution déjà trouvée.

Quelques implémentations classiques des B&B

- **Méthode de Dakin pour les PLNE :**
  - Parcourir l'arbre en profondeur (ce qui a une bonne chance de produire une solution réalisable assez vite)
  - Choisir à chaque itération le problème possédant la meilleure solution de son programme relaxé
  - Séparer sur une nouvelle variable dont la valeur (dans la solution optimale du programme relaxé) est la plus proche d'un entier k. Cette variable a une fourchette de valeurs possibles, disons [min,max]. On construit deux nouveaux problèmes, un avec [min,k], et l'autre avec [k+1,max]